1059. p葉函數ノ歪曲定理ニ就テ

福島　豊（阪大工學部）

Cartwright[1] ハ Littlewood, Frazer ノ仮ヲ承ケテ單葉函數ニ於ケル Koebe ノ歪曲定理ヲ p-valent 函數ノ場合ニ拡張シテキル. 茲ニ p-valent 函數トハ同ジ値ヲ高々 p 個取ル正則函數ノコトデアル。Cartwright ハ其ノ論文中特ニ p-valent ノ特殊ノ場合トシテ、次ノ結果ヲ得テキル。

定理. 函數

$$w(z) = z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \cdots\cdots$$

ガ $|z| \leqq 1$ デ正則デ且ツ p-valent デアルトスレバ

$$|w(z)| \leqq e^{8\pi p} r^p (1-r)^{-2p}, \quad (|z| = r < 1) \qquad \text{(A)}$$

Cartwright ハ以上ノ結果ヲ L. Ahlfors[2] ノ等角寫像ノ定理ヲ用ヒテ出シテキル。

筆者ハ最近 Teichmüller[3] ガ Deutsche Mathematik ニ發表シタ. 所謂 Modulsatz ヲ利用シテ $e^{8\pi}$ ヲ 16 デ置キ換ヘルコトガ出來タ。即チ

$$|w(z)| \leqq 16^p r^p (1-r)^{-2p} \text{ トナル} \qquad \text{(B)}$$

(B) ヲ得ルタメニ先ヅ Cartwright ノ方法及ビ Teichmüller ノ Modulsatz ノ必要ナ部分ダケ簡單ニ紹介スル。

I. $w(z) = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + \cdots\cdots$ (1)

ガ $|z| \leqq 1$ デ正則ナリトスル。次ニ

$$\rho = M(r) = \max_{0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi} |w(re^{i\vartheta})| \quad (0<r<1) \tag{2}$$

トスル。

$|w(z)| < \rho$ ヲ満足スル $|z| \leqq 1$ 内ノ像ヲ考ヘルニ一般ニコレハ Open set デ且一ツ又ハ一ツ以上ノ connected sets ヨリ出来テキル。然ルニ (2) ヨリコレラノ中ニハ必ズ円 $|z| < r$ ヲ含ム simply-connected region D ガ存在スル。コノ D ノ frontier ハ勿論 $|w(z)| = \rho$ ヲ満足スルガ Cartwright ニヨレバ

<u>此ノ frontier ハ $|z| < 1$ デハ double pt. ヲ有セズ且ツ arg $w(z)$ ハコノ frontier ノ各部分ニ於テ単調デアル。</u>

コトガ証明サレテヰル。(Fig. 1) (3)

$|z| \leqq 1$ ノ円周上ニ点 $e^{i\varphi}$ ヲ取リ 0 ト $-e^{i\varphi}$ ヲ結ブ直線デ円: $|z| \leqq 1$ ヲ切断シテ得ル region ヲ $D(\varphi)$ トスレバ $D(\varphi)$ ハ

$$\left| \arg \frac{e^{i\varphi} z}{(e^{i\varphi} - z)^2} \right| < \pi$$

ヲ満足スル。

コノ $D(\varphi)$ ノ frontier ノ中

$$\left.\begin{array}{l} \arg \dfrac{e^{i\varphi} z}{(e^{i\varphi}-z)^2} = \pi \text{ ヲ満足スル部分ヲ } \gamma_1 \\ \arg \dfrac{e^{i\varphi} z}{(e^{i\varphi}-z)^2} = -\pi \text{ ヲ満足スル部分ヲ } \gamma_2 \end{array}\right\} \text{トスル。(Fig.2)}$$

今 $|w(re^{i\vartheta})|$ = 對シ $M(r)=\rho$ ガ成立スル點ヲ $re^{i\vartheta_1}$ トスル $C(\rho)$ ヲ D ノ *frontier* ノ内 $re^{i\vartheta}$ ヲ含ム部分トスレバ $C(\rho)$ ハ D 全体ヲ囲ム閉曲線カ又ハ $|z|=1$ 上ニ二ツノ終点 $e^{i\vartheta_1}$ ト $e^{i\vartheta_2}$ ヲ有スル曲線トナル。(Fig.3)

$C(\rho)$ ヲ $D(\varphi)$ ノ *frontier* デ切ッタトキ $re^{i\vartheta}$ ヲ含ム $C(\rho)$ ノ部分ヲ $C(\rho, \varphi)$ トスル。

コノトキ Cartwright ハ次ノ重要ナ結果ヲ得テヰル。

即チ上記ノ $\varphi=\varphi(r)$ ヲ適當ニトルト $C(\rho,\varphi)$ ガ γ_1 及ビ γ_2 ノ上ニ各々一ツ宛終点ヲ有スル様ニスルコトガ出來ルト云フノデアル。(Fig.4) (4)

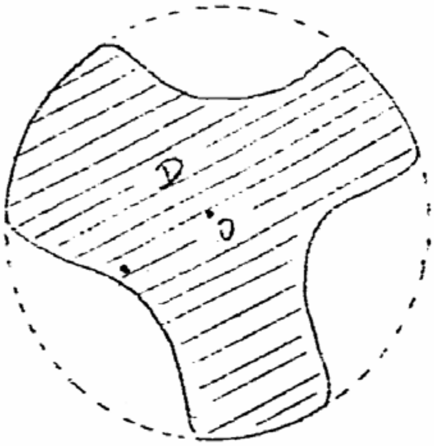


Fig.1

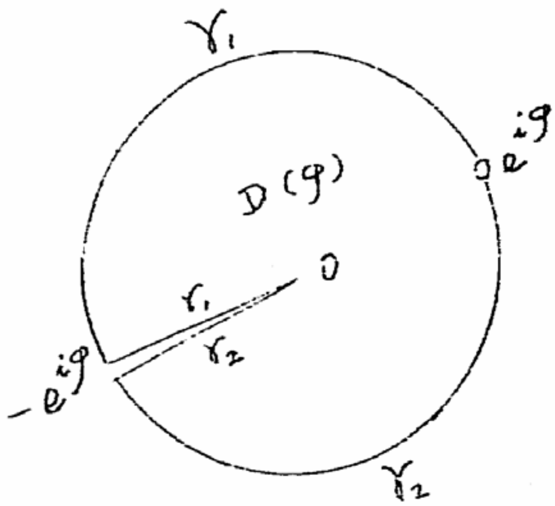


Fig.2

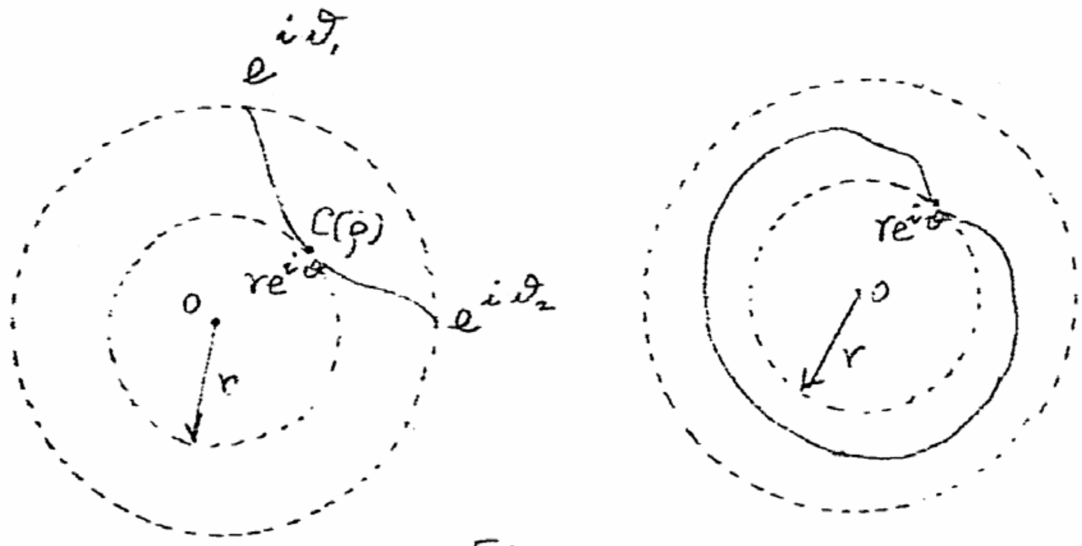


Fig. 3

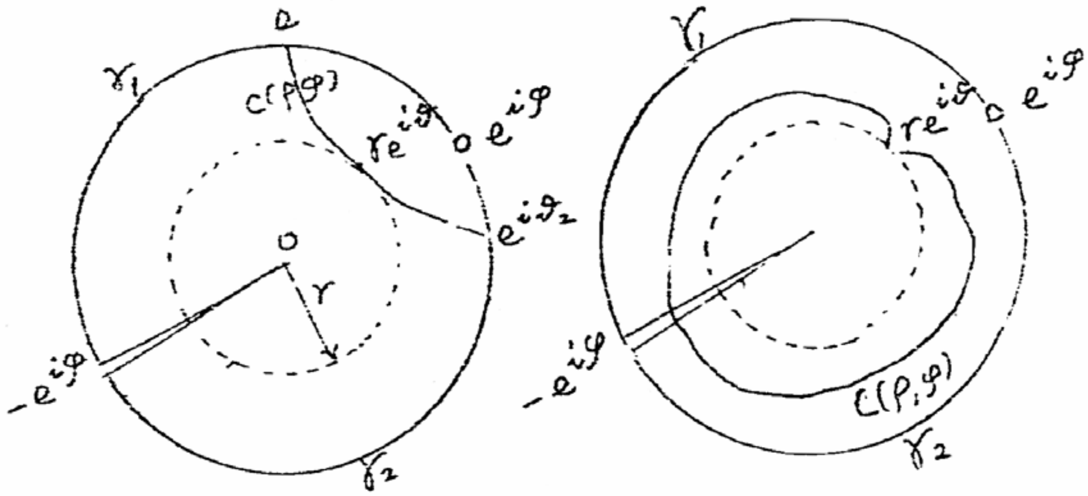


Fig. 4

次ニ $D(\varphi)$ ヲ

$$s=\sigma+i\tau=\log w(z)$$

ニヨッテ s-plane ノ $\Delta(\varphi)$ ニ移ス. (Fig. 7 (I))
(1) ガ $|z|\leqq 1$ ニ於テ特ニ p-valent ナリトスレバ $|z|\leqq 1$ ニ於テハ $z=0$ 以外ニ零点ヲ持タヌ. 従ッテ $\Delta(\varphi)$ ハ simply-connected ナル region デアル。

$D(\varphi)$ ノ γ_1, γ_2 ニ對スル $\Delta(\varphi)$ ノ curve ヲ Γ_1, Γ_2 トスル。

次ニ変換

$$\left.\begin{aligned} Z(z) &= p \log \frac{e^{i\varphi} z}{(e^{i\varphi}-z)^2} \\ \zeta(s) &= Z(z^{-1}(s)) = \xi + i\eta \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ヲ施ス．此処ニ $z^{-1}(s)$ ハ $s=\log w(z)$ ノ逆函数デアリ $w(z)$ ガ $D(\varphi)$ 内ニ零点ヲ有セヌカラ $\Delta(\varphi)$ ハ $D(\varphi)$ ニ正則ニ移サレル．変換 (5) ニヨリテ $D(\varphi)$ ハ ζ－平面上ノ帯 $|\eta|<p\pi$ ニ移サレル．(Fig. 7. (I)′)

Γ_1, Γ_2 ハ $\eta=p\pi$, $\eta=-p\pi$ ニ移サレル．サテ (3) 及ビ (4) ナル結果ニヨリ z－plane ノ $C(\rho,\varphi)$ ハ s-plane ニ於テ Γ_1, Γ_2 ニ跨ガル $\sigma=\log M(r)\ (=\rho_r)$ ナル切断ニ一對一連續對應スル。

而シテコノ切断ハ $|w(re^{i\vartheta})|=M(r)$ ニ相應スル点ヲ実際ニ通ル（$re^{i\vartheta}$ ハ $C(\rho,\varphi)$ ノ上ニアルカラ）

$\cdots\cdots(6)$

コノ $\sigma-\rho_r$ ナル切断ノ (5) ニヨル ζ－plane 上ノ像ヲ C_r トスル．(Fig. 7 (I)′)

II．次ニ Teichmüller ノ所論ニ移ル．今 z 平面上ニ単葉ナ二重連結領域 G ヲ考ヘル．特ニ G ノ補集合ガ G ニヨリ分タレル二ツノ連續集合ヨリ成ルトキ G ヲ ring domain ト名付ケテ置ク。

スルト G ハ寫像定理ニヨリ原点ヲ中心トシタ同心円ノ ring $r<|w|<R$ ニ等角ニ寫像サレル．コノ場合 Teichmüller ハ $M=\log\frac{R}{r}$ ナル量ヲ導入シテコレヲ G ノ Modul ト名付ケタ。コノ Modul ハ明カニ

Gノ等角寫像的変換ニヨリ不変ナル量デアル。

Gニ含マレル任意ノ ring domain G' ヲ考ヘ (Fig. 5) ソノ modul ヲ M' トスル。然ルトキハ次ノ定理ガ成立スル。

定理　<u>$M' \leqq M$ デアル。</u>

<u>等号ハ $G = G'$ ノトキノミ成立スル。</u>　(7)

次ニ補集合デアル。二ツノ連續集合ヲ K_1, K_2 トシ次ノ二條件ヲ滿足スル場合ヲ考ヘル。

(a) K_1 ハ原点ヲ中心トシタ單位円 ($|z| \leqq 1$) デアル。

(b) K_2 ハ ∞ 及ビ或ル定点 $pe^{i\theta}$ ($p > 1$) ナル点ヲ含ム。(即チ ∞ 及ビ $pe^{i\theta}$ ハG上ニナイ)

(a) (b) ヲ滿足スル G ノ中特ニ (b) ニ於テ K_2 ガ P ト ∞ トヲ結ブ直線ナル場合ヲ考ヘル。(Fig. 6)

コノ特殊ナル場合 (Fig. 6) ノ G ノ modul ヲ $\log \Phi(P)$ デ表ハス。スルト次ノ重要ナ結果ガ得ラレテヰル。

定理　<u>(a), (b) ヲ滿足スル任意ノ領域 G ノ modul ヲ M</u>
<u>トスルト</u>

$$M \leqq \log \Phi(P) \qquad (8)$$

尚ホ <u>Teichmüller ハ</u>
<u>$\Phi(P)$ ヲ評價シテ</u>

$$\Phi(P) < 4P \qquad (9)$$

ヲ得テヰル。

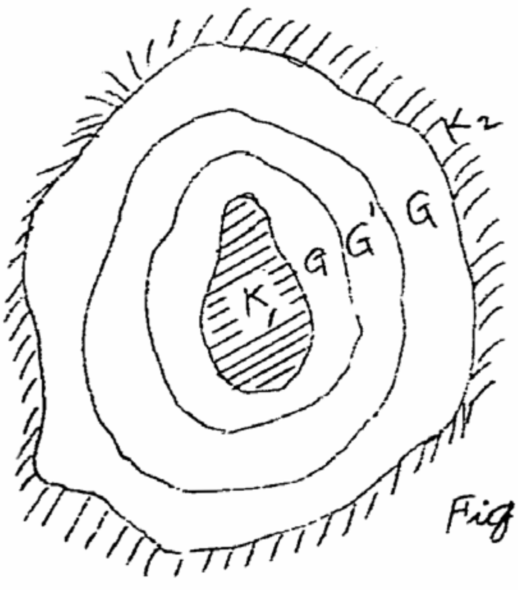
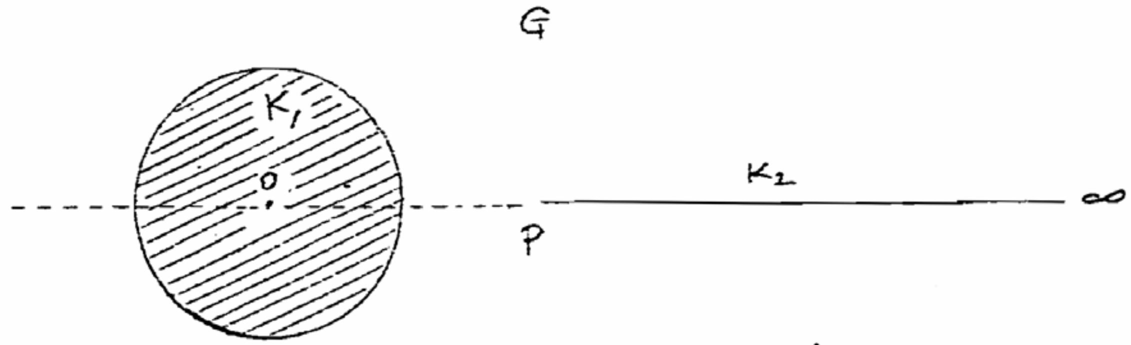
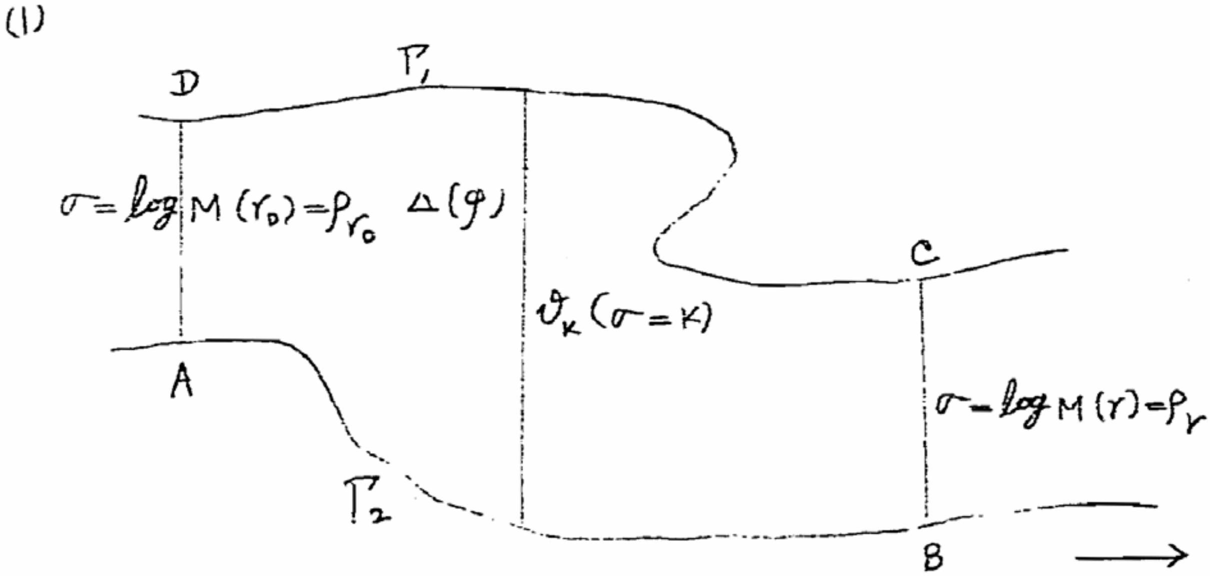


Fig. 5

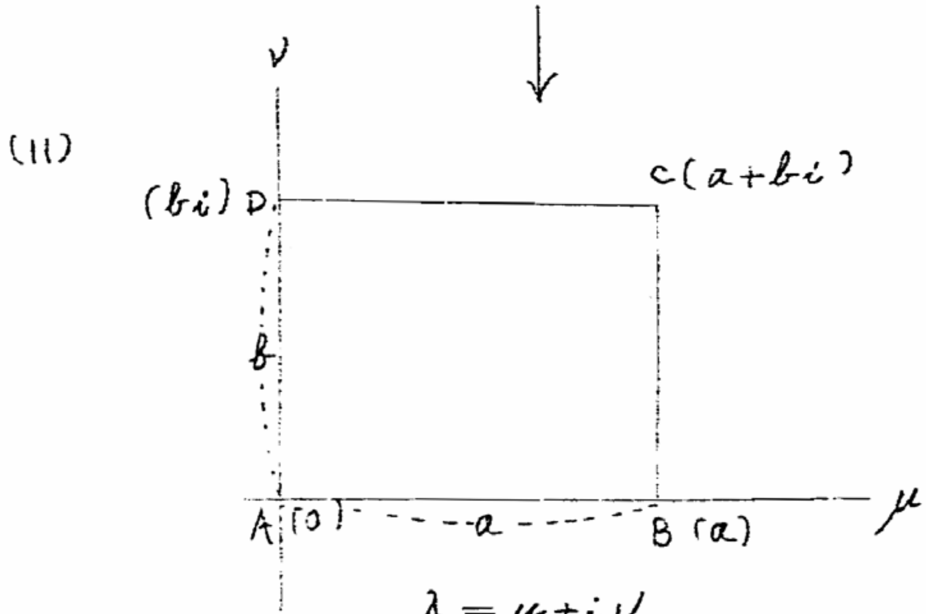


G, modul $= \log \phi(P)$

Fig. 6

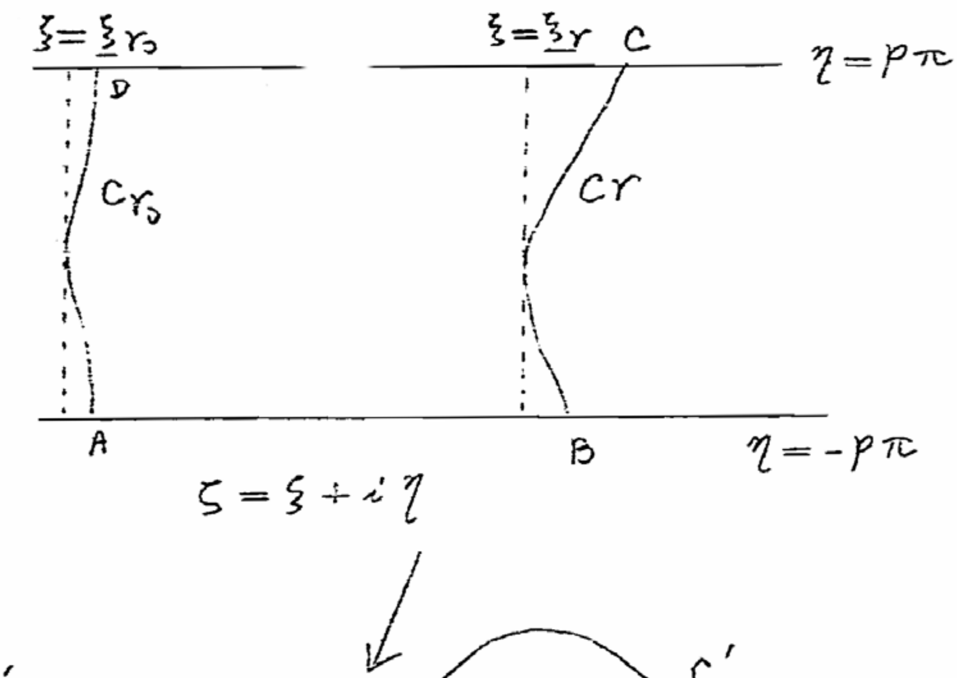


$s = \log w(z) = \sigma + i\tau$

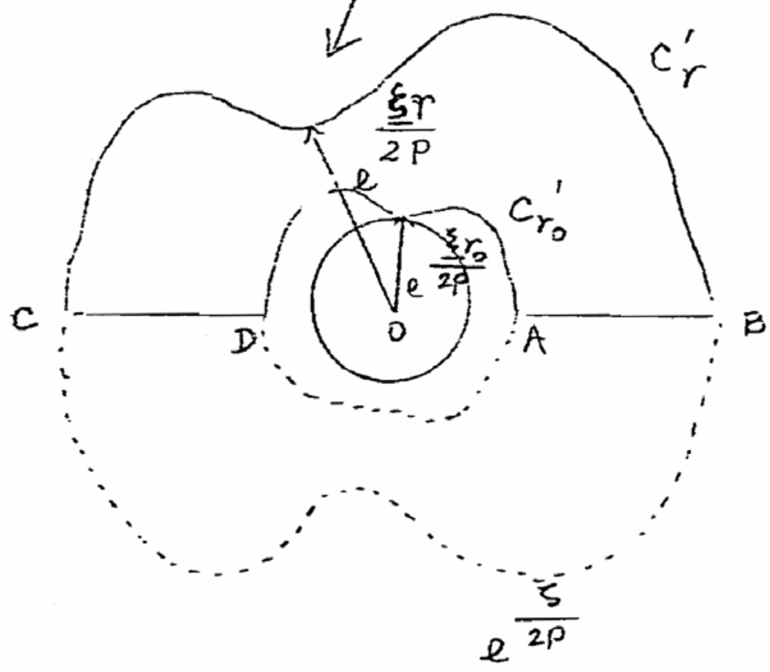


$\lambda = \mu + i\nu$

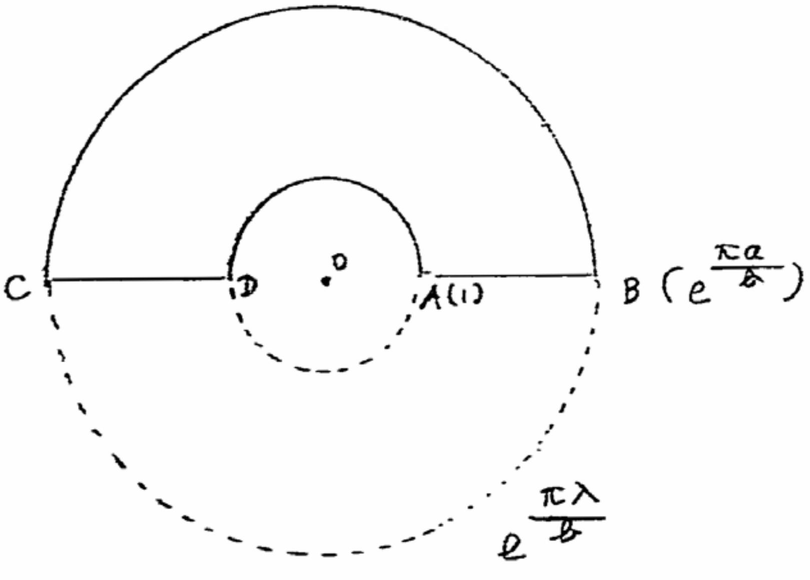
(I)'


$\xi = \xi_{r_0}$
$\xi = \xi_r$
C
D
C_{r_0}
C_r
$\eta = p\pi$
A
B
$\eta = -p\pi$
$\zeta = \xi + i\eta$

(II)'


C'_r
$\frac{\xi_r}{2p}$
e
C'_{r_0}
$e^{\frac{\xi_{r_0}}{2p}}$
C
D
O
A
B
$e^{\frac{\zeta}{2p}}$

(III)


C
D
O
A(1)
B $(e^{\frac{\pi a}{b}})$
$e^{\frac{\pi\lambda}{b}}$

III. 以上 I, II, ノ準備ノ下ニ (B) ノ証明ヲスル。

I ニ説明シタ s-plane ニ於テ $\sigma = \log M(r) = \rho r$ ナル切断以外ニ $\sigma = K$ ナル切断 ϑ_K ヲ考ヘル。コノ切断ノ選ビ方ハ次ノ様ニスル。

「今 Γ_1, Γ_2 ノ方程式ヲ parameter t デ次ノ様ニ表シテ置ク。

Γ_1: $s = \sigma_1(t) + i\tau_1(t)$,

Γ_2: $s = \sigma_2(t) + i\tau_2(t)$

コヽニ t ハ z ガ γ_1, γ_2 上ヲ 0 ヨリ $e^{i\varphi}$ マデ変化スルトキ 0 ヨリ 1 迄変化スルトシテ置ク。コノトキ $\sigma = K$ ニ對應スル Γ_1 上ノ点ノ t ガ最小ナルモノヲトツテ ϑ_K ヲ定メレバヨイ。」

更ニ $\sigma = \log M(r_0) = \rho r_0$ $(r_0 < r)$ ナル切断 $\vartheta_{\rho r_0}$ ヲ定メテオク。

ϑ_K ノ長サヲ Ⓗ(K) デ表ハス。

次ニ Fig. 7 ニ於テ

Γ_1, Γ_2, $\sigma = \rho r$, $\sigma = \rho r_0$ デ囲マレタ, $\Delta(\varphi)$ ノ部分 (I) ヲ λ-plane $(\lambda = \mu + i\nu)$ ノ矩形 (II) ヘ寫シ, ソレヲ $e^{\frac{\pi\lambda}{b}}$ ニヨリ semi-ring (III) ニ移ス。

ζ-plane ノ寫像部分 (I)' ヲ, $e^{\frac{\zeta}{2r}}$ ニヨリ (II)' ニ寫像スル。コノトキ C_r, C_{r_0} ハ夫々 C'_r, C'_{r_0} ニ移ルモノトスル。

「Fig. 7. 中對應ヲ明ラカニスルタメ, 寫像ニ於ケル相對應スル点ヲ同一文字 A, B, C, D デ表ハシテ置ク」

(III) 及ビ (II)' ヲ鏡像ノ原理ヲ用ヒテ横軸ニ關シ對稱ナル部分ニ接續スル。スルト (III) 及ビ (II)' ハ ring domain ニナル。尚 (I)' ニ於テ C_r, C_{r_0} ノ上ニ於ケル点ノ real part ξ ノ minimum ヲ夫々 ξ_r, ξ_{r_0} デ表ハス。

スルト明ラカニ (II)' ニ於テ C'_r ト原点トノ minimum distance ハ $e^{\frac{\xi_r}{2p}}$ デアリ、C'_{r_0} ト原点トノ minimum distance ハ $e^{\frac{\xi_{r_0}}{2p}}$ デアル。

s-plane ヨリ λ-plane ノ寫像ニ於テ

$$b \leqq \int_{\vartheta_\sigma} \left|\frac{d\lambda}{d\tau}\right| d\tau$$

(ϑ_σ ノ λ-plane ノ寫像ハ AB, CD ニ跨ルアル curve デアルカラ b ヨリ小サクナイ)

($\sigma = K$ ニ相當スル切斷ヲ ϑ_K トシタガ、特ニ σ ノ K ヲ指定セナイ場合ニハ一般ニ ϑ_σ デ切斷ヲ表ハシテオク。從テ長サハ $\Theta(\sigma)$ デアル)

Schwarz ノ不等式ヨリ

$$b^2 \leqq \int_{\vartheta_\sigma} d\tau \int_{\vartheta_\sigma} \left|\frac{d\lambda}{d\tau}\right|^2 d\tau$$

$$\frac{b^2}{\Theta(\sigma)} \leqq \int_{\vartheta_\sigma} \left|\frac{d\lambda}{ds}\right|^2 d\tau$$

$$\therefore\ b^2 \int_{\rho_{r_0}}^{\rho_r} \frac{d\sigma}{\Theta(\sigma)} \leqq \int_{\rho_{r_0}}^{\rho_r} \int_{\vartheta_\sigma} \left|\frac{d\lambda}{ds}\right|^2 d\sigma\, d\tau \leqq ab$$

$$\therefore \int_{\rho_{r_0}}^{\rho_r} \frac{d\sigma}{\Theta(\sigma)} \leqq \frac{a}{b} \qquad (10)$$

(III) ノ modul ハ $\log \dfrac{e^{\frac{\pi a}{b}}}{1} = \dfrac{\pi}{b} a$

(II)′ ノ modul ヲ M トスレバ

(III) ト (II)′ ハ等角寫像的對應デアルカラ

$$\frac{\pi}{b} a = M$$

然ルニ M ノ modul ハ (II)′ ニ於テ C'_{r_0} ヲ原點ヲ中心トシ半徑 $e^{\frac{\xi_{r_0}}{2p}}$ ナル円デ置キ換ヘタ modul M′ ヨリ大キクナイ (C'_r ハモトノマヽ) (II ノ定理 (9) ニヨル) 即チ

$$M \leqq M'$$

即チ　$\pi \dfrac{a}{b} \leqq M'$　　(11)

サテ M′ ハ円 $(0, e^{\frac{\xi_{r_0}}{2p}})$ ト中心ヨリノ minimum distance $e^{\frac{\xi_r}{2p}}$ ナル curve C'_r デ囲マレタ図形ノ modul デアルカラ II ノ定理 (8), (9) ニヨリ

$$M' \leqq \log \phi\left(\frac{e^{\frac{\xi_r}{2p}}}{e^{\frac{\xi_{r_0}}{2p}}}\right) < \log 4 e^{\frac{\xi_r - \xi_{r_0}}{2p}} = \log 4 + \frac{\xi_r - \xi_{r_0}}{2p}$$

即チ　$M' < \log 4 + \dfrac{\xi_r - \xi_{r_0}}{2p}$　　(12)

(10), (11), (12) ヨリ

$$\pi \int_{\rho_{r_0}}^{\rho_r} \frac{d\sigma}{\Theta(\sigma)} < \log 4 + \frac{\xi_r - \xi_{r_0}}{2p}$$

然ルニ $w(z)$ ハ p-valent デアルカラ

$$\Theta(\sigma) \leqq 2p\pi$$

デアル。

$$\therefore \quad \frac{1}{2p}(\rho_r - \rho_{r_0}) < \log 4 + \frac{\xi_r - \xi_{r_0}}{2p} \qquad (13)$$

然ルニ $\quad \rho_r = \log M(r) \qquad (14)$

又 $\rho_{r_0} = \log M(r_0)$ デアルガ, 任意ノ正数 ε ニ対シテ r_0 ヲ充分小サクトレバ, コレハ $p \log r_0(1+\varepsilon)$ ヨリ小ナラシメ得 ($w(z) = z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \cdots\cdots$ ナル展開形式ヨリ明ラカ)

$$\therefore \quad \rho_{r_0} < p \log (1+\varepsilon) r_0 \qquad (15)$$

又 ξ_{r_0} ハ $p \log (1-\varepsilon) r_0$ ヨリ大ナラシメ得。

$$\xi_{r_0} > p \log r_0(1-\varepsilon) \qquad (16)$$

又 ξ_r ハ $\xi_r \leqq p \log \dfrac{r}{(1-r)^2}$ ヲ満足スル。

何故ナラバ I ノ所論ガ明ラカナルヤウニ $\sigma = \rho_r$ 上ニハ $Z = re^{i\vartheta}$ ニ對應スル点ヲ実際ニトルカラ C_r 上ニハ勿論ソノ對應点ガアル。然ルニ Z ト ζ ノ對應ハ (5) ニヨリ

$$Z(z) = p \log \frac{e^{i\varphi} z}{(e^{i\varphi} - z)^2}$$

$$|Z(re^{i\vartheta})| \leqq p \log \frac{r}{(1-r)^2} \text{ デアリ}$$

從ツテ 勿論

$$\xi_r \leqq p \log \frac{r}{(1-r)^2} \tag{17}$$

デアル。

條件 (14), (15), (16), (17) ヲ (13) ニ入レルト

$$\frac{1}{2p}\left\{\log M(r) - p\log r_0(1+\varepsilon)\right\} < \log 4$$

$$+ \frac{1}{2p}\left\{p\log\frac{r}{(1-r)^2} - p\log r_0(1-\varepsilon)\right\}$$

$$\therefore \quad \log M(r) < \log 4^{2p} + p\log\frac{r}{(1-r)^2} + p\log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

$r_0 \to 0$ トシテ $\varepsilon \to 0$ トスルト

$$M(r) \leqq 4^{2p}\,\frac{r^p}{(1-r)^{2p}}$$

即チ

$$M(r) \leqq 16^p\,\frac{r^p}{(1-r)^{2p}}$$

$$\therefore \quad |w(z)| \leqq 16^p\,\frac{r^p}{(1-r)^{2p}} \qquad (r = |z| < 1) \tag{B}$$

以上ニヨリ (B) ヲ証明シ得タ。

以上ノ研究ニ於テ本學部城先生ニ色々御援助ヲ戴キマシタ。紙上厚ク才禮申上ゲマス。

參考文献

(1) M. L. Cartwright:
Some inequalities in the theory of functions, Math. Ann., 111 (1935)

(2) R. Nevanlinna:
Eindeutige analytische Funktionen,
Springer, 1936.

(3) V. O. Teichmüller
Untersuchung über konforme und
quasikonforme Abbildung, Deutsche
Mathematik, 3 (1938)

(西大二三六八)